第４講　微分法・積分法②

1　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$ax^2+b \geqq (x+1)^2$ が成り立つとき，定積分 $\int_0^1 (ax^2+b)\,dx$ を最小にする a，b と，そのときの定積分の値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　実数 α と β は　$\alpha \leqq \beta$，$\alpha \neq 0$，$\beta > 0$ を満たし　$f(x)=\dfrac{3}{\alpha\beta}(x-\alpha)(x-\beta)$　とする．

$\alpha=\beta^2$ のとき，$\displaystyle\int_0^{\beta} |f(x)|dx$ を最小にする β の値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1](1) $(a,\ b)$ を平面上の点とする．2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち，それら 2 実数解の絶対値の和が 1 以下であるとき，点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を求め，図示せよ．

(2) (1)で求めた範囲の面積を求めよ．

[2](1) 円 $x^2+y^2=4$ と放物線 $C：y=x^2+2$ の両方に接する直線は 3 本ある．これらの接線の方程式を求めよ．

(2) (1)における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする．接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　微分法・積分法②

1　$0 \leqq x \leqq 1$ において $ax^2+b \geqq (x+1)^2$ が成り立つとき，定積分 $\int_0^1 (ax^2+b)dx$ を最小にする a，b と，そのときの定積分の値を求めよ．

$ax^2+b \geqq (x+1)^2$　より　$(a-1)x^2-2x+b-1 \geqq 0$

$f(x)=(a-1)x^2-2x+b-1$ とおき，$0 \leqq x \leqq 1$ における最小値が 0 以上であるときを考える．

$a=1$ のとき　$f(x)=-2x+b-1$　これは単調減少

　よって　$0 \leqq x \leqq 1$ における最小値は $f(1)$

　ゆえに　$f(1) \geqq 0$ より　$b-3 \geqq 0$　　つまり　$b \geqq 3$

$a \neq 1$ のとき　$f(x)=(a-1)\left(x-\dfrac{1}{a-1}\right)^2-\dfrac{1}{a-1}+b-1$　　軸：$x=\dfrac{1}{a-1}$

　$a-1>0$　つまり　$a>1$ のとき　$\dfrac{1}{a-1}>0$

　$\dfrac{1}{a-1} \leqq 1$　つまり　$a \geqq 2$ のとき

　　最小値 $f\left(\dfrac{1}{a-1}\right)=-\dfrac{1}{a-1}+b-1 \geqq 0$ より　$b \geqq \dfrac{1}{a-1}+1$

　$1<a \leqq 2$ のとき　最小値 $f(1) \geqq 0$ であるから　$a-1-2+b-1 \geqq 0$ より　$b \geqq -a+4$

　$a<1$ のとき　$\dfrac{1}{a-1}<0$　よって　最小値 $f(1) \geqq 0$ より　$b \geqq -a+4$（$a=1$ のときも成立）

以上より　$a \geqq 2$ のとき　$b \geqq \dfrac{1}{a-1}+1$　　$a \leqq 2$ のとき　$b \geqq -a+4$

$\int_0^1 (ax^2+b)dx=\left[\dfrac{a}{3}x^3+bx\right]_0^1=\dfrac{a}{3}+b=k$ とおくと

$a \geqq 2$ のとき　$k \geqq \dfrac{a}{3}+\dfrac{1}{a-1}+1=\dfrac{a-1}{3}+\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{4}{3} \geqq 2\sqrt{\dfrac{a-1}{3}\cdot\dfrac{1}{a-1}}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}+4}{3}$

（等号成立は　$\dfrac{a-1}{3}=\dfrac{1}{a-1}$　$(a-1)^2=3$ より　$a=1+\sqrt{3}$ のとき）

$a \leqq 2$ のとき　$k \geqq \dfrac{a}{3}-a+4=-\dfrac{2}{3}a+4 \geqq -\dfrac{2}{3}\cdot 2+4=\dfrac{8}{3}$　（等号成立は $a=2$ のとき）

$\dfrac{8}{3}>\dfrac{2\sqrt{2}+4}{3}$ より　求める最小値は　$\boldsymbol{a=1+\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}$ **のとき**　$\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}+4}{3}}$

2　実数 α と β は　$\alpha \leqq \beta$，$\alpha \neq 0$，$\beta>0$ を満たし　$f(x)=\dfrac{3}{\alpha\beta}(x-\alpha)(x-\beta)$　とする．$\alpha=\beta^2$ のとき，$\int_0^\beta |f(x)|dx$ を最小にする β の値を求めよ．

$\alpha \leqq \beta$ より　$\beta^2 \leqq \beta$　$\beta(\beta-1) \leqq 0$　　よって　$\beta \leqq 1$　つまり　$0<\beta \leqq 1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，$\alpha=\beta^2>0$ より　$\alpha\beta>0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，x 軸との交点の x 座標は α，β

$$\int_0^\beta |f(x)|dx=\int_0^\alpha f(x)dx-\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

$$=\int_0^\alpha f(x)dx-\left(\int_0^\beta f(x)dx-\int_0^\alpha f(x)dx\right)$$

$$=2\int_0^\alpha f(x)dx-\int_0^\beta f(x)dx$$

$$\int_0^t f(x)dx=\frac{3}{\alpha\beta}\int_0^t (x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{3}{\alpha\beta}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_0^t$$

$$=\frac{3}{\beta^3}\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{\beta^2+\beta}{2}t^2+\beta^3 t\right)=\left(\frac{t}{\beta}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{\beta+1}{\beta^2}\right)t^2+3t=F(t)$$ とおくと

$$F(\alpha)=F(\beta^2)=\beta^3-\frac{3}{2}(\beta^3+\beta^2)+3\beta^2=-\frac{1}{2}\beta^3+\frac{3}{2}\beta^2$$

$$F(\beta)=1-\frac{3}{2}(\beta+1)+3\beta=\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}$$

よって　$\displaystyle\int_0^\beta |f(x)|dx=-\beta^3+3\beta^2-\frac{3}{2}\beta+\frac{1}{2}$　　これを $g(\beta)$ とおく　$(0<\beta\leqq 1)$

$$g'(\beta)=-3\beta^2+6\beta-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(2\beta^2-4\beta+1)\qquad \beta=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\ のとき\quad g'(\beta)=0$$

よって，$g(\beta)$ は　$\boldsymbol{\beta=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$　で最小となる．

3　[1](1)　$(a,\ b)$ を平面上の点とする．2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち，それら 2 実数解の絶対値の和が 1 以下であるとき，点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を求め，図示せよ．

(2)　(1)で求めた範囲の面積を求めよ．

---

[1](1)　$x^2+ax+b=0$ の判別式を D とすると　$D=a^2-4b\geqq 0$ より　$b\leqq \dfrac{1}{4}a^2$

このときこの方程式の 2 解を α, β とすると，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$

$|\alpha|+|\beta|\leqq 1$ より　$(|\alpha|+|\beta|)^2\leqq 1$　　$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2\leqq 1$　　$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|\leqq 1$

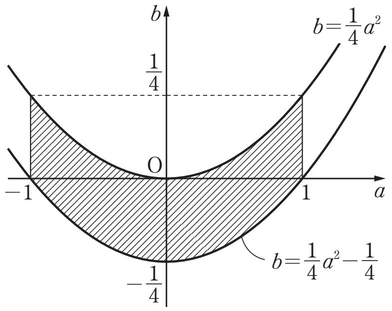
よって　$a^2-2b+2|b|\leqq 1$

ゆえに　**$b\geqq 0$ のとき**　$a^2-2b+2b\leqq 1$

つまり　$\boldsymbol{-1\leqq a\leqq 1}$

$b<0$ のとき　$a^2-2b-2b\leqq 1$

つまり　$\boldsymbol{b\geqq \dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}(a+1)(a-1)}$



よって，求める範囲は右図斜線部分（境界含む）

(2)　$\displaystyle 2\int_0^1\left\{a^2-\left(a^2-\frac{1}{4}\right)\right\}da=\frac{1}{2}\int_0^1 da=\frac{1}{2}[a]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [2](1) 円 $x^2+y^2=4$ と放物線 $C：y=x^2+2$ の両方に接する直線は 3 本ある．これらの接線の方程式を求めよ．

(2) (1)における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする．接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) $C：y=x^2+2$ より　$y'=2x$

$x=t$ における C の接線の方程式は　$y=2t(x-t)+t^2+2$　　つまり　$y=2tx-t^2+2$

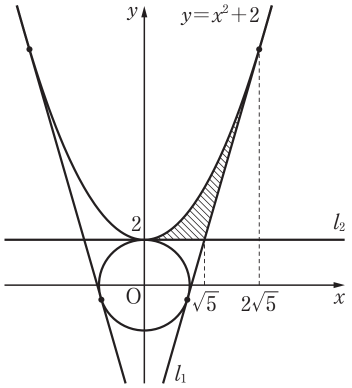
円 $x^2+y^2=4$ とこの接線　$2tx-y-t^2+2=0$ が接するとき

$$\frac{|-t^2+2|}{\sqrt{4t^2+1}}=2 \qquad |t^2-2|=2\sqrt{4t^2+1} \qquad t^4-4t^2+4=4(4t^2+1)$$

$$t^4-20t^2=0 \qquad t=0,\ \pm2\sqrt{5}$$

よって，求める接線は

$$\boldsymbol{y=2,\ y=4\sqrt{5}x-18,\ y=-4\sqrt{5}x-18}$$



(2) $l_1：y=4\sqrt{5}x-18$ と $l_2：y=2$ の交点の x 座標は　$x=\sqrt{5}$

よって

$$\int_0^{\sqrt{5}}\{(x^2+2)-2\}dx+\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}\{(x^2+2)-(4\sqrt{5}x-18)\}dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{5}}x^2dx+\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}(x-2\sqrt{5})^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{5}}+\left[\frac{1}{3}(x-2\sqrt{5})^3\right]_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{3}-\frac{1}{3}(-\sqrt{5})^3=\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{5\sqrt{5}}{3}=\boldsymbol{\frac{10\sqrt{5}}{3}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C : y=ax^2\ (x \geqq 0)$ を考える．曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ．

(2) 曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(3) $a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 $y=x^2$ 上の点 A$(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 B$(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく．ただし，$a<b$ とする．

(1)　2 直線 l，m と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ．

(2)　点 C が放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C: y=ax^2\ (x\geqq 0)$ を考える．曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ．

(2) 曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

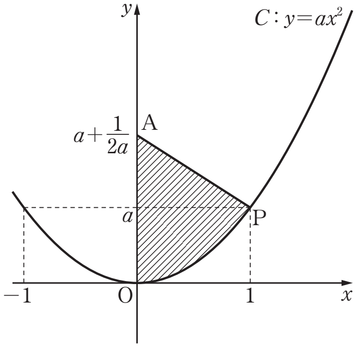
(3) $a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

(1) $\mathrm{P}(t,\ at^2)$ $(t>0)$ とおくと

$$\mathrm{AP}^2=t^2+\left\{at^2-\left(a+\frac{1}{2a}\right)\right\}^2=a^2t^4-2a^2t^2+\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2=a^2(t^2-1)^2+1+\frac{1}{4a^2}$$

これが最小となるのは　$t^2=1$　より　$t=1$ のとき

ゆえに　$\mathbf{P(1,\ a)}$　　$\mathbf{AP}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4a^2}}$



(2) $$S(a)=\frac{1}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{2a}\right)-a\right\}\cdot 1+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(a-ax^2)dx$$

$$=\frac{1}{4a}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}-a(x+1)(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{4a}+\frac{1}{2}\cdot\boxed{\frac{a}{6}\cdot\{1-(-1)\}^3}=\frac{2}{3}a+\frac{1}{4a}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(3) $a>0$ のとき

$$S(a)=\frac{2}{3}a+\frac{1}{4a}\geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{4a}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号成立は　$\dfrac{2}{3}a=\dfrac{1}{4a}$　つまり　$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき

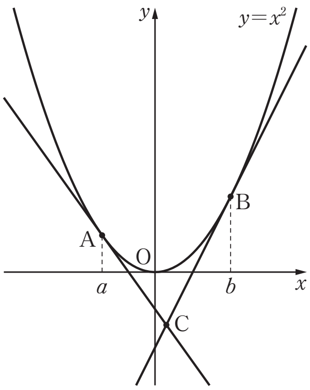
したがって　$\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$ のとき　$S(a)$ は最小値　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$　をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 $y=x^2$ 上の点 $A(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 $B(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく．ただし，$a<b$ とする．

(1) 2 直線 l，m と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ.

(2) 点 C が放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ.



(1) $y=x^2$ より　$y'=2x$

接線 l の方程式は $y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

接線 m の方程式は $y=2bx-b^2$

この 2 式より y を消去して $2ax-a^2=2bx-b^2$　　$x=\dfrac{a+b}{2}$

よって，l と m の交点 C の座標は $\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

題意の面積は

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{x^2-(2ax-a^2)\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\{x^2-(2bx-b^2)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{12}(b-a)^3}$$

展開せずに積分

(2) $C(X,\ Y)$ とおくと　$X=\dfrac{a+b}{2}$，$Y=ab$

C が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ 上の点より　$Y=\dfrac{1}{2}X^2-X-2$

ここで　$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=4X^2-4Y=2X^2+4X+8=2(X+1)^2+6$　より

$b-a$ は　$X=-1$ のとき　最小値　$\sqrt{6}$　となる.

よって，求める S の最小値は　$\dfrac{1}{12}(\sqrt{6})^3=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。